

Considérons, pour $B \in \mathcal{B}(R)$, l'ensemble $C := \{(x, y) \in R^2, x - y \in B\}$.

On a :

$$P_{X-Y}(B) = P(X - Y \in B) = P((X, Y) \in C) = \int_{R^2} 1_C(x, y) dP_{(X, Y)}(x, y)$$

Or, X et Y sont indépendantes, donc $dP_{(X, Y)}(x, y) = dP_X(x) \otimes dP_Y(y)$. D'autre part, $1_C(x, y) = 1_B(x - y)$. Ainsi, par le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient que :

$$\begin{aligned} P_{X-Y}(B) &= \int_{R^2} 1_C(x, y) dP_X(x) \otimes dP_Y(y) \\ &= \int_R \left(\int_R 1_B(x - y) dP_X(x) \right) dP_Y(y) \\ &= \int_R \left(\int_R 1_{B+y}(x) dP_X(x) \right) dP_Y(y) \\ &= \int_R P_X(B + y) dP_Y(y) \\ &= \int_R \left(\int_{B+y} f_X(u) d\lambda(u) \right) f_Y(y) d\lambda(y) \\ &= \int_R \left(\int_R 1_{B+y}(u) f_X(u) d\lambda(u) \right) f_Y(y) d\lambda(y) \\ &= \int_R \left(\int_R 1_B(u - y) f_X(u) d\lambda(u) \right) f_Y(y) d\lambda(y) \\ &= \int_R \left(\int_R 1_B(x) f_X(x + y) d\lambda(x) \right) f_Y(y) d\lambda(y) \text{ avec } x = u - y \\ &= \int_R \left(\int_B f_X(x + y) d\lambda(x) \right) f_Y(y) d\lambda(y) \text{ par Fubini - Tonelli.} \\ P_{X-Y}(B) &= \int_B \left(\int_R f_X(x + y) f_Y(y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{X-Y}(x) = \int_R f_X(x + y) f_Y(y) d\lambda(y)$

Avec $f_X(x) = e^{-x} 1_{[0; +\infty[}(x)$ et $f_X(y) = e^{-y} 1_{[0; +\infty[}(y)$ on obtient que $f_X(x + y) = e^{-x-y} 1_{[0; +\infty[}(x + y)$, et donc !

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(x) &= \int_R f_X(x + y) f_Y(y) d\lambda(y) \\ &= \int_R e^{-x-y} 1_{[0; +\infty[}(x + y) e^{-y} 1_{[0; +\infty[}(y) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0; +\infty[} e^{-x-2y} 1_{[0; +\infty[}(x + y) d\lambda(y) \\ f_{X-Y}(x) &= \int_{[0; +\infty[} e^{-x-2y} 1_{[-x; +\infty[}(y) d\lambda(y) \end{aligned}$$

La condition $x + y \geq 0$ est équivalente à $y \geq -x$ avec $x \geq 0$.

Or, pour $x \geq 0$, on a $[0; +\infty[\cap [-x; +\infty[= [0; +\infty[$, et donc :

$$f_{X-Y}(x) = \int_{[0; +\infty[} e^{-x-2y} d\lambda(y) = \left[-\frac{1}{2} e^{-x-2y} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-x}$$